戸田格子hierarchyの超対称化について(代数解析学の諸相)

池田, 薫

数理解析研究所講究録
660巻 1988年 104-122

戸田格子ｈｉｅｒａｒｃｈｙの超対称化について。

池田　薫　　（都立大　理）
Kaoru Ikeda

§０　序文

２次元戸田格子（０．１）は非線形可積分系の重要な一例になっている。

$$u_{x^+x^-}(s)=\exp(u(s)-u(s-1))-\exp(u(s+1)-u(s)) \quad (0.1)$$

方程式（０．１）を含むようなある方程式系を戸田格子（Ｔｏｄａｌａｔｔｃｅといい、以下ＴＬと略記する。）ｈｉｅｒａｒｃｙと言う。　ＴＬｈｉｅｒａｒｃｈｙは上野，高崎両氏により研究されて　函数表示，　無限次元Ｌｉｅ環との関係が見出された。
　両氏の仕事のなかで重要な役目を果したのが
Ｒｉｅｍａｎｎ－Ｈｉｌｂｅｒｔ分解である（以下Ｒ－Ｈ分解と略記）。　ＴＬｈｉｅｒａｒｃｈｙの超対称化はこのＲ－Ｈ分解から出発する。　Ｒ－Ｈ分解とは無限次元Ｌｉｅ群の分解という代数的問題であるがその分解からＴＬ　ｈｉｅｒａｒｃｈｙを導出することができる。　我々はＲ－Ｈ分解を超対称化することにより超対称化ＴＬ（ｓｕｐｅｒ　ＴＬ，以下ＳＴＬと略記）ｈｉｅｒａｒｃｈｙを導いた。　超対称化とは微分方程式（たとえば戸田格子）に表れる定数，変数，及び関数を反可換なＧｒａｓｓｍａｎｎ変数におきかえたものである。このＳＴＬｈｉｅｒａｒｃｈｙはそのｂｏｄｙ　ｐａｒｔとして２組のＴＬｈｉｅｒａｒｃｈｙを含んでいる。　よってＳＴＬｈｉｅｒａｒｃｈｙはＴＬｈｉｅｒａｒｃｈｙの自然な超対称化と考えられる。ＳＴＬｈｉｅｒａｒｃｈｙの解の表示においてＴＬｈｉｅｒａｒｃｈｙの　関数の類似物としてｓｕｐｅｒ　ｄｅｔｅｒｍｉｎａｎｔ（もしくはＢｅｒｅｚｉｎｉａｎ）が得られる。
ＳＴＬｈｉｅｒａｒｃｈｙの解の変換群に関連してＬｉｅ　ｓｕｐｅｒ代数　$gl(\infty|\infty)$が表れる。　$gl(\infty|\infty)$を$osp(\infty|\infty)$と言う別のＬｉｅ　ｓｕｐｅｒ代数にとりかえることによりＳＴＬｈｉｅｒａｒｃｈｙとは別なｏｓｐ－ＳＴＬｈｉｅｒａｒｃｈｙが得られる。　ｏｓｐ－ＳＴＬｈｉｅｒａｒｃｈｙはそのｂｏｄｙ　ｐａｒｔとしてＢＴＬ，ＣＴＬｈｉｅｒａｒｃｈｙを含んでいる。　ｏｓｐ－ＳＴＬｈｉｅｒａｒｃｈｙに４周期条件を課すことによりｓｕｐｅｒＳｉｎｅ－Ｇｏｒｄｏｎ方程式が得られる。

§1 超対称化戸田格子 hierarchy

まず代数的準備を行う。$e_0, e_1, \cdots$ を生成元とする代数を考える。e_i 達は次の関係式をみたす。

$$e_i e_j + e_j e_i = 0 \qquad i, j \in \{1, 2, 3, \cdots\}$$

e_i 達で生成される $\mathbb{C}$ 上の代数を Grassmann 代数といい $\mathcal{A}$ であらわす。即ち

$$\mathcal{A} = \sum_{\alpha \in \Pi} \mathbb{C} e_\alpha$$

但し α は多重指数で $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$

Π は上の性質をみたす多重指数の集合とし

$e_\alpha = e_{\alpha_1} e_{\alpha_2} \cdots e_{\alpha_n}$ とする。

$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \in \Pi$ に対し $|\alpha|$ を $|\alpha| = m$ で定義する。$|\alpha| = 0$ の際は $\alpha = \phi$ とし $e_\phi = 1$ とする。$j \in \mathbb{Z}$ に対して $\underline{j}$ で j の属する 2 の剰余類とする。$\mathcal{A}$ には自然に $\mathbb{Z}_2$- gradation が入る。即ち

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\underline{0}} \oplus \mathcal{A}_{\underline{1}} \qquad \mathcal{A}_{\underline{i}} = \bigoplus_{m \equiv i \,(\mathrm{mod}\, 2)} \sum_{|\alpha| = m} \mathbb{C} e_\alpha \qquad i = 0, 1$$

次が成立する。

① $\qquad \mathcal{A}_{\underline{i}} \cdot \mathcal{A}_{\underline{j}} \subset \mathcal{A}_{\underline{i+j}}$

② $a \in A_{\underline{i}}, b \in A_{\underline{j}}$ とした時

$$ab = (-)^{ij} ba$$

一般に①②が成り立つような $\mathbb{Z}_2$ gradation が入った代数系を super commutative algebra という。今後一般の super-commutative algebra を Q であらわす。

$Q = Q_{\underline{0}} \oplus Q_{\underline{1}}$ とした時自然な射影

$$\varepsilon : Q \longrightarrow Q/(Q_{\underline{1}})$$

（但し $(Q_{\underline{1}})$ は $Q_{\underline{1}}$ から生成された ideal）

を body map という。$Q = A$ のとき ε は A から $\mathbb{C}$ への射影となる。$\xi \in Q$ に対し像 $\varepsilon(\xi)$ を ξ の body part という。

$\xi = \xi_{\underline{0}} + \xi_{\underline{1}}$ 　　$\xi_{\underline{i}} \in A_{\underline{i}}$ としたとき

$\xi^* = \xi_{\underline{0}} - \xi_{\underline{1}}$ 　　とする。

さて次に Grassmann 代数上の"函数"を定義しよう。

<u>定義</u> 1.1　X^+, X^- を even な Grassmann 変数 θ^+, θ^- を odd な Grassmann 変数とする。$t^+ = (t_1^+, t_2^+, \cdots)$, $t^- = (t_1^-, t_2^-, \cdots)$ とし $t_{2j}^{\pm}$ $j = 1.2, \cdots$ を even な Grassmann 変数, $t_{2j+1}^{\pm}$ $j = 0.1.2, \cdots$ を odd な Grassmann 変数とする。$\mathcal{X}$ を $\mathbb{C}[[X^{\pm}, t_2^{\pm}, t_4^{\pm} \cdots]]$ の商体とする。$\mathbb{Z}_2$-graded 代数 $\mathfrak{S}$ を次で定義する。

$\mathfrak{S} = (\mathbb{C}[\theta^{\pm}] \otimes \mathcal{X}) \otimes (\mathbb{C}[[t_1^{\pm}, t_3^{\pm} \cdots]] \otimes A)$. $\mathfrak{S}$ には $\mathbb{Z}_2$-grade が入り super commutative algebra をなす。$\mathfrak{S}$ を super field という。次に $\mathfrak{S}$ に作用する super vector field を定

義する。

定義1.2

$$\Theta^{\pm} = \partial_{\theta^{\pm}} + \theta^{\pm}\partial_{x^{\pm}}$$

$$\Theta^{\pm}_{2j+1} = \partial_{t^{\pm}_{2j+1}} + \sum_{j=0}^{\infty} t^{\pm}_{2k+1}\partial_{t^{\pm}_{2j+2k+2}} \qquad j = 0, 1, 2, \cdots\cdots$$

$$\Theta^{\pm}_{2j} = \partial_{t^{\pm}_{2j}} \qquad j = 1, 2, \cdots\cdots$$

$\Theta^{\pm}_{2j+1}$ は無限和であるが S 上 well defined に作用している。
super vector field 達は以下の関係をみたしている。

$$[\Theta^{\pm}, \Theta^{\pm}]_{+} = 2\partial_{x^{\pm}}, \quad [\Theta^{\pm}_{2j+1}, \Theta^{\pm}_{2k+1}]_{+} = 2\Theta^{\pm}_{2j+2k+2}$$

$[A, B]_{+} = AB + BA$ をあらわす。
他の super vector field 達は交換又は反交換する。　又 Θ を $\Theta^{\pm}$ もしくは $\Theta^{\pm}_{2j+1}$ としたとき Θ は super Leipniz rule をみたしている。即ち

$$\Theta(fg) = (\Theta f)g + f^{*}\Theta g \qquad f, g \in S \quad 。$$

$A \in Mat(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}; Q)$ としたとき $\varepsilon(A)$ 及び A^{*} を次で定義する。

$$\varepsilon(A) = (\varepsilon(a_{ij}))_{i,j\in\mathbb{Z}}, \quad A^{*} = (a^{*}_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}} \quad 但し\ A = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}。$$

$k \in \mathbb{Z}$ に対して作用素をつぎで定義する。$A \in Mat(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, Q)$ に対し

$$A^{*k} = \begin{cases} A & k \equiv 0 \pmod 2 \\ A^{*} & k \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

以上の準備のもとに超対称化戸田格子（STL）hierarchyを導入しよう。Λをshift行列 $\Lambda=(\delta_{i+1,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$，$\Gamma$を $\Gamma=((-)^i\delta_{i+1,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$

$\Lambda\Gamma=-\Gamma\Lambda$，$\Gamma^2=-\Lambda^2$ がなりたつ。

$diag[a(s)]$ を対角行列 $(a(s)\delta_{is})_{i,s\in\mathbb{Z}}$ とする。

行列 B, C, B_j, C_j を次で定義する。

$$B=\Lambda+diag[b(s)] \qquad C=diag[c(s)]\Lambda^{-1}$$

$$b(s)\in S_{\underline{1}} \qquad c(s)\in S_{\underline{0}} \qquad \varepsilon(c(s))\neq 0$$

$$B_j=\sum_{k=0}^{j} diag[b_{kj}(s)]\Lambda^{-k+j}, \quad diag[b_{0j}(s)]\Lambda^{j}=\Gamma^{j}$$

$$b_{kj}(s)\in S_{\underline{k}}$$

$$C_j=\sum_{k=0}^{j-1} diag[c_{kj}(s)]\Lambda^{k-j} \qquad \varepsilon(c_{0j}(s))\neq 0$$

$$c_{kj}(s)\in S_{\underline{k}}$$

次の Zakarov-Shabat 型の方程式系を STL hierarchy という。

$$\textcircled{H}^{+}C+\textcircled{H}^{-}B=-B^{*}C-C^{*}B \tag{1.1}$$

$$\textcircled{H}^{+}B_j+(-)^{j+1}\textcircled{H}_j^{+}B=(-)^{j}B^{*\underline{j}}B_j-B_j^{*}B \tag{1.2}$$

$$\textcircled{H}_k^{+}B_j+(-)^{k\cdot j+1}\textcircled{H}_j^{+}B_k=(-)^{jk}B_k^{*\underline{j}}B_j-B_j^{*\underline{k}}B_k+2\delta_{\underline{jk},\underline{1}}B_{j+k} \tag{1.3}$$

$$\textcircled{H}^{-}C_j+(-)^{j+1}\textcircled{H}_j^{-}C=(-)^{j}C^{*\underline{j}}C_j-C_j^{*}C \tag{1.4}$$

$$\textcircled{H}_k^{-}C_j+(-)^{k\cdot j+1}\textcircled{H}_j^{-}C_k=(-)^{jk}C_k^{*\underline{j}}C_j-C_j^{*\underline{k}}C_k+2\delta_{\underline{jk},1}C_{j+k} \tag{1.5}$$

$$\textcircled{H}_j^{+}C_k+(-)^{j\cdot k+1}\textcircled{H}_k^{-}B_j=(-)^{j\cdot k}B_j^{*\underline{k}}C_k-C_k^{*\underline{j}}B_j \tag{1.6}$$

$$\Theta^+ C_k + (-)^{k+1} \Theta^-_k B = (-)^k B^{*k} C_k - C^*_k B \qquad (1.7)$$

$$\Theta^- B_k + (-)^{k+1} \Theta^+_k C = (-)^k C^{*k} B_k - B^*_k C \qquad (1.8)$$

方程式(1.1)において $B = \Lambda + diag[b(s)]$, $C = diag[c(s)]\Lambda^{-1}$ を代入すると

$$\Theta^- b(s) = -b(s) - b(s+1) \qquad (1.9)$$

$$\Theta^+ c(s) = (b(s) - b(s-1))c(s) \qquad (1.10)$$

$u(s) \in S_0$ を $b(s) = \Theta^+ u(s)$, $c(s) = exp(u(s) - u(s-1))$ となるようにとると (1.9), (1.10) より

$$\Theta^+\Theta^- u(s) = exp(u(s) - u(s-1)) + exp(u(s+1) - u(s)) \qquad (1.11)$$

を得る。 $u(s)$ を θ^+, θ^- について展開すると

$u(s) = u_{00}(s) + \theta^+ u_{01}(s) + \theta^- u_{10}(s) + \theta^+\theta^- u_{11}(s)$ となり

(1.11) から

$$-u_{11}(s) = exp(u_{00}(s) - u_{00}(s-1)) + exp(u_{00}(s+1) - u_{00}(s)) \qquad (1.12)$$

$$\partial_{x^+} u_{10}(s) = (exp(u_{00}(s) - u_{00}(s-1)))(u_{01}(s) - u_{01}(s-1)) + (exp(u_{00}(s+1) - u_{00}(s))) \times (u_{01}(s+1) - u_{01}(s)) \qquad (1.13)$$

$$\partial_{x^-} u_{01}(s) = (exp(u_{00}(s) - u_{00}(s-1)))(u_{10}(s) - u_{10}(s-1)) + (exp(u_{00}(s+1) - u_{00}(s))) \times (u_{10}(s+1) - u_{10}(s)) \qquad (1.14)$$

$$\partial_{x^+x^-} u_{00}(s) = (\exp(u_{00}(s)-u_{00}(s-1)))\{u_{11}(s)-u_{11}(s-1)-(u_{01}(s)-u_{01}(s-1))\times(u_{10}(s)-u_{10}(s-1))\}$$

$$+(\exp(u_{00}(s+1)-u_{00}(s)))\{u_{11}(s+1)-u_{11}(s)-(u_{01}(s+1)-u_{01}(s))(u_{10}(s+1)-u_{10}(s))\} \tag{1.15}$$

を得る。 $f(s)=\mathcal{E}(u(s))$ とすると $f(s)$ は戸田格子方程式をみたす。すなわち

$$\partial_{x^+}\partial_{x^-} f(s) = e^{f(s)-f(s-2)} - e^{f(s+2)-f(s)} \tag{1.16}$$

これは (1.11) に2組の独立した（sが奇数，偶数で）戸田格子を含むことを意味している。

§2 STL hierarchy の解の表示と Riemann-Hilbert 分解。

まず最初に super Lie 群 $SGL(\infty|\infty, Q)$ を定義しよう。

<u>定義</u> 2.1

$$SGL(\infty|\infty, Q) = \{A=(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}} \mid a_{ij}\in Q_{\underline{i+j}},\ \mathcal{E}(A)\text{は可逆}\}$$

つぎに $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 行列 A を $A=\sum_{j\in\mathbb{Z}} diag[a_j(s)]\Lambda^j$ と展開したとき

$(A)_{上}=\sum_{j\geq 0} diag[a_j(s)]\Lambda^j$ ，$(A)_{下}=\sum_{j<0} diag[a_j(s)]\Lambda^j$ をそれぞれ

A の上 part，A の下 part という。

$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 行列 $\hat{W}_+=\hat{W}_+(x^\pm,\theta^\pm,t^\pm)$, $\hat{W}_-=\hat{W}_-(x^\pm,\theta^\pm,t^\pm)$ を次で定義する。

$$\hat{W}_+=\sum_{j=0}^{\infty}diag[w_j^+(s)]\Lambda^{-j}\quad,\ \hat{W}_-=\sum_{j=0}^{\infty}diag[w_j^-(s)]\Lambda^{-j}$$

ここで $w_j^\pm(s)\in S_{\underline{j}}$ とし $w_0^+(s)=1$, $\varepsilon(w_0^-(s))\neq 0$ とする。

$$\Phi_+=exp(\theta^+\Lambda+x^+\Lambda^2+\sum_{j=1}^{\infty}t_j^+\Gamma^j),\ \Phi_-=exp(\theta^-\Gamma^{-1}+x^-\Gamma^{-2}+\sum_{j=1}^{\infty}t_j^-\Lambda^{-j})$$

とおく。$W_\pm=\hat{W}_\pm\Phi_\pm$ として

<u>定理</u>2.1　$A\in SGL(\infty|\infty,\mathcal{A})$ に対して上の W_+,W_- でつぎの分解が成り立つとする。

$$W_+^{-1}W_-=A \qquad (2.1)$$

このとき $B=(\hat{W}_+^*\Lambda\hat{W}_+^{-1})_+$, $B_j=(\hat{W}_+^{*j}\Gamma^j\hat{W}_+^{-1})_+$

$C=(\hat{W}_0^*\Gamma^{-1}\hat{W}_0^{-1})_-$ 　$C_j=(\hat{W}_0^{*j}\Lambda^{-j}\hat{W}_0^{-1})_-$ として

STL hierarchy (1.1)〜(1.8) が従う。//

$\hat{W}_\pm$ を wave matrices という。

分解(2.1)を Riemann-Hilbert (R-H) 分解という。

行列 $A=(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ に対して $\check{A}$ で次の行列をあらわす。

$$\check{A}=\begin{bmatrix}(a_{\mu\nu})_{\substack{\mu\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2)\\ \nu\equiv 0\quad ''}} & (a_{\mu\nu})_{\substack{\mu\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2)\\ \nu\equiv 1\quad ''}}\\ (a_{\mu\nu})_{\substack{\mu\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,2)\\ \nu\equiv 0\quad ''}} & (a_{\mu\nu})_{\substack{\mu\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,2)\\ \nu\equiv 1\quad ''}}\end{bmatrix}$$ //

次に STL hierarchy の解の表示を行う。

定義 2.2

$$\check{A} = \begin{bmatrix} A_{00}, & A_{01} \\ A_{10}, & A_{11} \end{bmatrix}$$

$A_{ij} \in Mat(N^c \times N^c, Q)$ で A_{11}, A_{00} は可逆行列とする

$sdet\,\check{A}$, $s^{-1}det\,\check{A}$ を次でさだめる

$$sdet\,\check{A} = det(A_{00} - A_{01}A_{11}^{-1}A_{10}) / det\,A_{11}$$

$$s^{-1}det\,\check{A} = det\,(A_{11} - A_{10}A_{00}^{-1}A_{01}) / det\,A_{00} \quad .$$

$sdet\,\check{A}$ を super determinant もしくは Berezinian という。

又 $sdet\,\check{A} \cdot s^{-1}det\,\check{A} = 1$ が成立する。

定理 2.2　$A \in SGL(\infty|\infty, \Lambda)$ とし $H = \Phi_+ A \Phi_-^{-1}$

$\tau(s) = sdet({}^t\Xi_0(s)\check{H}\Xi_0(s))$, $\tau_{2j}(s) = sdet({}^t\Xi_j(s)\check{H}\Xi_0(s))$ とする。

但し

s：偶数

$$\Xi_j(s) = \begin{bmatrix} (\delta_{(s/2)+\mu-1,\, \nu+Y(j+\nu)})_{\substack{\mu\in\mathbb{Z} \\ \nu\in N^c}} & 0 \\ 0 & (\delta_{(s/2)+\mu-1,\, \nu})_{\substack{\mu\in\mathbb{Z} \\ \nu\in N^c}} \end{bmatrix}$$

$$Y_+(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$ とする。

s：奇数

$$\Xi_j(s) = \begin{bmatrix} 0 & (\delta_{((s-1)/2)-\mu,\nu})_{\substack{\mu\in\mathbb{Z} \\ \nu\in N^c}} \\ (\delta_{((s-3)/2)-\mu,\nu+\gamma(j+\nu)})_{\substack{\mu\in\mathbb{Z} \\ \nu\in N^c}} & 0 \end{bmatrix}$$

とする。　このとき次の (i), (ii), (iii) が成り立つ。

(i) $\quad u_1^+(s) = \Theta^+ \log \tau(s)$

(ii) $\quad u_{2j}^+(s) = \tau_{2j}(s)/\tau(s)$

(iii) $\quad u_{2j+1}^+(s) = (\Theta^+ - (-)^s \Theta_1^+)\tau_{2j}(s)/\tau(s)$

証明

R-H分解より $\quad (\hat{W}_+ H)_F = 0 \qquad (2,2)$

よって $\quad {}^t(u_j^+(s))_{j\geq 0}\,(h_{s-i,s-j})_{\substack{i\geq 0 \\ j\geq 1}} = 0 \qquad (2,3)$

但し $H = (h_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ とする。　(2.3)の両辺のチェックをとって

$$({}^t(u_{2j}^+(s))_{j\geq 1},\ {}^t(u_{2j+1}^+(s))_{j\geq 0}) \begin{bmatrix} H_{00}(s), & H_{01}(s) \\ H_{10}(s) & H_{11}(s) \end{bmatrix}$$

$$= -({}^t(h_{s,s-2j})_{j\geq 1},\ {}^t(h_{s,s-2j+1})_{j\geq 0}) \qquad (2.4)$$

(2.4)の両辺に右から $\begin{bmatrix} 1 & -H_{00}^{-1}(s)H_{01}(s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ を掛けると

$$
{}^t(\mu^+_{2j+1}(s))_{j\geq 0}\left(H_{11}(s)-H_{10}(s)H_{00}^{-1}(s)H_{01}(s)\right)
$$

$$
=-{}^t(h_{s,s-2j-1})_{j\geq 0}+{}^t(h_{s,s-2j}(s))_{j\geq 1}H_{00}^{-1}(s)H_{01}(s) \qquad (2.5)
$$

(2.5)の右辺を$-\vec{C}(s)$とするとクラメルの公式により

$$
\mu^+_{2j+1}(s)=\frac{-\det(\text{分母に出てくる行列の}\overbrace{\ }^{-j-1}\text{行目を}\vec{C}(s)\text{にする。})}{\det\left(H_{11}(s)-H_{10}(s)H_{00}^{-1}(s)H_{01}(s)\right)} \qquad (2.6)
$$

(2.6)の分母，分子を$\det H_{00}(s)$で割って

$$
\mu^+_{2j+1}(s)=\frac{\{(2.6)\text{の分子式}\}/\det H_{00}(s)}{s^{-1}\det\check{H}} \qquad (2.7)
$$

(i)を示す。　$h(s)=({}^t(h_{s,s-2j}(s))_{j\geq 1},{}^t(h_{s,s-2j+1}(s))_{j\geq 1})$として

$\Theta^+ s^{-1}\det\check{H}(s)=s^{-1}\det(\overbrace{H(s)\text{の}-1\text{行目を}h(s)\text{におきかえたもの}}^{\vee})$．(但し$H(s)=(h_{s-i,s-j})_{i,j\geq 1}$)を示せばよい。

${}^t\vec{h}_e(s)={}^t(h_{s,s-2j})_{j\geq 1}$　，${}^t\vec{h}_o(s)={}^t(h_{s,s-2j+1})_{j\geq 1}$とすると

$\Theta^+H_{00}(s)=H_{10}(s)$　，$\Theta^+H_{01}(s)=H_{11}(s)$

$$
\Theta^+H_{10}(s)=\Lambda_{N^c}H_{00}(s)+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ \\ {}^t\vec{h}_e(s)\end{bmatrix}}_{N^c}\Bigg\}N^c
$$

$$\Theta^{+} H_{11}(s) = \Lambda_{\mathbb{N}^c} H_{01}(s) + \begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ {}^t\vec{h}_{\theta}(s) \end{array}\right] \\ \mathbb{N}^c \end{array}\!\!{}^{\mathbb{N}^c} , \quad \Lambda_{\mathbb{N}^c} = (\delta_{i+1,j})_{i,j\in\mathbb{N}^c}$$

$$A^{-1}\det \check{H}(s) = \det\left(H_{00}^{-1}(s)\left(H_{11}(s) - H_{10}(s)H_{00}^{-1}(s)H_{01}(s)\right)\right)$$ だから

$H_{00}^{-1}(s) = (\alpha_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}^c}$, $H_{11}(s) - H_{10}(s)H_{00}^{-1}(s)H_{01}(s) = (\beta_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}^c}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ {}^t\vec{h}_{\theta}(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ {}^t\vec{h}_{e}(s) \end{bmatrix} H_{00}^{-1}(s) H_{01}(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ {}^t\vec{\beta}_0 \end{bmatrix} \qquad {}^t\vec{\beta}_0 = {}^t(\beta_{0i})_{i\in\mathbb{N}^c}$$

とすると

$$\Theta^{+}\left(H_{00}^{-1}(s)(H_{11}(s) - H_{10}(s)H_{00}^{-1}(s)H_{01}(s)\right)$$

$$= H_{00}^{-1}(s)\left(\begin{bmatrix} 0 \\ {}^t\vec{h}_{\theta}(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ {}^t\vec{h}_{e}(s) \end{bmatrix} H_{00}^{-1}(s) H_{01}(s) \right)$$ より

$$\Theta^{+} A^{-1}\det \check{H}(s) = \sum_{\mu=-1}^{-\infty} \det \begin{bmatrix} {}^t(\alpha_{\mu,-1}\beta_{0\rho})_{\rho\le -1} & \mu\text{行目} \\ {}^t\left(\sum_{j\le -1}\alpha_{\nu j}\beta_{j\rho}\right)_{\rho\le -1} & \nu(\ne\mu)\text{行目} \end{bmatrix}$$

上の和でμ項目の行列式をμ行目に沿って展開するとΔ_{ij}を

$H_{00}^{-1}(s)\left(H_{11}(s) - H_{10}(s)H_{00}^{-1}(s)H_{01}(s)\right)$の$i,j$小行列式として

$$\Theta^{+} A^{-1}\det \check{H}(s) = \sum_{\mu=-1}^{-\infty} \sum_{\rho=-1}^{-\infty} (-)^{\mu+\rho} \alpha_{\mu,-1}\beta_{0\rho}\Delta_{\mu\rho}$$

$$= \sum_{\rho=-1}^{-\infty} \beta_{0\rho} \sum_{\mu=-1}^{-\infty} (-)^{\mu+\rho} \alpha_{\mu,-1} \Delta_{\mu\rho}$$

$$= \sum_{\rho=-1}^{-\infty} \beta_{0\rho} \det \begin{array}{c} \left[\left(\sum_{j\le -1} \alpha_{mj} \beta_{jn} \right)_{m\le -1} \quad \left(\alpha_{m,-1} \right)_{m\le -1} \right] \\ \qquad n(\neq\rho)\text{列目} \qquad\qquad \rho\text{列目} \end{array} \tag{2.8}$$

(2.8)の各行列式において $n(\neq\rho)$列目から $(\alpha_{m,-1})_{m\le -1}$ の $\beta_{-1,n}$ 倍を引くと

$$\textcircled{H}^{+} s^{-1} \det \check{H} = \sum_{\rho=-1}^{-\infty} \beta_{0\rho} \det \begin{array}{c} \left[\left(\sum_{j\le -2} \alpha_{mj} \beta_{jm} \right)_{m\le -1} , \ \left(\alpha_{m,-1} \right)_{m\le -1} \right] \\ \qquad n(\neq\rho)\text{列目} \qquad\qquad \rho\text{列目} \end{array}$$

$$= \sum_{\rho=-1}^{-\infty} \beta_{0\rho} \det(\alpha_{ij})_{i,j\le -1} \det \begin{array}{c} \left(\begin{bmatrix} (\beta_{mn})_{m\le -2} \\ 0 \end{bmatrix} \ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ n(\neq\rho)\text{列目} \quad \rho\text{列目} \end{array}$$

$$= \det(\alpha_{ij})_{i,j\le -1} \sum_{\rho=-1}^{-\infty} (-)^{\rho+1} \beta_{0\rho} \det(\beta_{mn})_{\substack{m\le -2 \\ n\le -1 \ \ n\neq\rho}}$$

$$= \det(\alpha_{ij})_{i,j\le -1} \cdot \det(\beta_{ij})_{\substack{i\le 0,\ i\neq -1 \\ j\le -1}}$$

$$= \frac{\det\left(H_{11}(s) - H_{10}(s) H_{00}^{-1}(s) H_{01}(s)\right)\Big|_{\text{$H_{11}(s)$と$H_{10}(s)$の-1行目を ${}^t\vec{h}_e(s)$ と ${}^t\vec{h}_0(s)$ でおきかえたもの。}}}{\det H_{00}(s)}$$

となり(i)が示せた。$\Xi_j(s)$をつかうと(i)のようにあらわせる。

(ii)はクラメルの公式そのもの(iii)は[8]を参照して下さい。 //

§3 osp-STL hierarchy

$\mathfrak{gl}(\infty|\infty)$ を $\mathbb{Z}_2$-grade の入った次のような Lie super 代数とする。 $\mathfrak{gl}(\infty|\infty)=\mathfrak{gl}(\infty|\infty)_{\underline{0}}\oplus\mathfrak{gl}(\infty|\infty)_{\underline{1}}$ で

$$\mathfrak{gl}(\infty|\infty)_{\underline{0}}=\left\{A=\begin{bmatrix}A_{00}, & 0\\ 0 & A_{11}\end{bmatrix}\;\middle|\; A_{00},A_{11}\in Mat(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\mathbb{C})\right\}$$

$$\mathfrak{gl}(\infty|\infty)_{\underline{1}}=\left\{A=\begin{bmatrix}0 & A_{01}\\ A_{10} & 0\end{bmatrix}\;\middle|\; A_{01},A_{10}\in Mat(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\mathbb{C})\right\}$$

カッコ積は $[A,B]=AB-(-)^{ij}BA$ 但し $A\in\mathfrak{gl}(\infty|\infty)_{\underline{i}}$
$B\in\mathfrak{gl}(\infty|\infty)_{\underline{j}}$

とする。次に super transpose "st" を定義する。

$$A=\begin{bmatrix}A_{00} & A_{01}\\ A_{10} & A_{11}\end{bmatrix}\in\mathfrak{gl}(\infty|\infty) \text{ に対し } {}^{st}A=\begin{bmatrix}{}^{t}A_{00} & {}^{t}A_{10}\\ -{}^{t}A_{01} & {}^{t}A_{11}\end{bmatrix}$$

とする。 $A\in\mathfrak{gl}(\infty|\infty)_{\underline{i}}$, $B\in\mathfrak{gl}(\infty|\infty)_{\underline{j}}$ としたとき
${}^{st}(AB)=(-)^{ij}\,{}^{st}B\,{}^{st}A$ がなりたつ。 $J=((-)^{i}\delta_{i,-j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$
$K=\Lambda J$ とする。

$$P=\begin{bmatrix}J & 0\\ 0 & -K\end{bmatrix} \text{ とする。}$$

Lie super 代数 $osp(\infty|\infty)$ を次で定義する。

定義3.1

$$\mathfrak{osp}(\infty|\infty)=\{A\in\mathfrak{gl}(\infty|\infty) \mid {}^{st}P\,{}^{st}A\,P=-A\}$$

$$\mathfrak{osp}(\infty|\infty)_{\underline{i}}=\mathfrak{osp}(\infty|\infty)\cap\mathfrak{gl}(\infty|\infty)_{\underline{i}}\quad。$$

$\mathfrak{osp}(\infty|\infty)_{\underline{0}}$ は $\mathfrak{o}(\infty)\oplus\mathfrak{sp}(\infty)$ に同型（無限Lie代数 $\mathfrak{o}(\infty)$ と $\mathfrak{sp}(\infty)$ については[9]参照.）である。

定義3.2

$$\mathfrak{osp}(Q)=\mathfrak{osp}(\infty|\infty)\otimes Q$$

$$\mathfrak{osp}(Q)=\mathfrak{osp}(Q)_{\underline{0}}\oplus\mathfrak{osp}(Q)_{\underline{1}}\quad で$$

$$\mathfrak{osp}(Q)_{\underline{i}}=\bigoplus_{\mu+\nu\equiv i\,(\mathrm{mod}\,2)}\mathfrak{osp}(\infty|\infty)_{\underline{\mu}}\otimes Q_{\underline{\nu}}$$

つぎに super Lie 群 $Osp(\infty|\infty,Q)$ を定義する。

$$Osp(\infty|\infty,Q)=\{A\in SGL(\infty|\infty,Q) \mid {}^{st}P\,{}^{st}A\,P=A^{-1}\}$$

$Osp(\infty|\infty,Q)$ は $exp(A)\quad A\in\mathfrak{osp}(Q)_{\underline{0}}$ で生成される。

さて次のR-H分解を考えよう。

$$\tilde{\Phi}_{+}=exp(\theta^{+}\Lambda+x^{+}\Lambda^{2}+\sum_{j\not\equiv 0,1(\mathrm{mod}\,4)}t_j^{+}\Gamma^{j})$$

$$\tilde{\Phi}_{-}=exp(\theta^{-}\Gamma^{-1}+x^{-}\Gamma^{-2}+\sum_{j\not\equiv 0,1(\mathrm{mod}\,4)}t_j^{-}\Lambda^{-j})$$

$\hat{W}_+$, $\hat{W}_-$ を wave matrices として

$$\hat{W}_+^{-1}\hat{W}_- = \tilde{\Phi}_+ A \tilde{\Phi}_-^{-1} \tag{3.1}$$

定理 3.1 (i) $A \in Osp(\infty|\infty, \mathcal{A})$ ならば $\hat{W}_\pm \in Osp(\infty|\infty, S)$

(ii) 定理 2.1 において $\check{B}$, $\check{C} \in osp(S)_{\underline{1}}$, $\check{B}_j \in osp(S)_{\underline{j}}$

$\check{C}_j \in osp(S)_{\underline{j}}$ $j \not\equiv 0,1 \pmod 4$

証明 (i) $\hat{W}_\pm \in Osp(\infty|\infty, S)$ は R-H 分解の一意性より従う。

(ii) $\widetilde{st}$ を次で定義する。 $A = \begin{bmatrix} A_{00}, & A_{01} \\ A_{10}, & A_{11} \end{bmatrix}$ とし

① $A_{ij} \in Mat(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, Q_{\underline{i+j}})$ に対して

$$\widetilde{st}A = \begin{bmatrix} {}^tA_{00}, & {}^tA_{10} \\ -{}^tA_{01} & {}^tA_{11} \end{bmatrix}$$

② 上の A で $A_{ij} \in Mat(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, Q_{\underline{i+j+1}})$ のとき

$$\widetilde{st}A = \begin{bmatrix} {}^tA_{00}, & -{}^tA_{10} \\ {}^tA_{01} & {}^tA_{11} \end{bmatrix}$$ とする。

$A\in \mathfrak{gl}(Q)_{\underline{i}}$, $B\in \mathfrak{gl}(Q)_{\underline{j}}$ とすると

${}^{\widetilde{st}}(AB)=(-)^{ij}\,{}^{\widetilde{st}}B\,{}^{\widetilde{st}}A$ となる。

(ii)を $B=(\hat{W}_+^{*}\Lambda\hat{W}_+^{-1})_{\underline{1}}$ について示す。

$${}^{\widetilde{st}}P\,{}^{\widetilde{st}}(\check{\hat{W}}_+^{*}\check{\Lambda}\check{\hat{W}}_+^{-1})P={}^{\widetilde{st}}P\,{}^{\widetilde{st}}\hat{W}_+^{-1}\,{}^{\widetilde{st}}\check{\Lambda}\,{}^{\widetilde{st}}\hat{W}_+^{*}P$$

$$={}^{\widetilde{st}}P\,{}^{\widetilde{st}}\check{\hat{W}}_+^{-1}P\,{}^{\widetilde{st}}P\,{}^{\widetilde{st}}\check{\Lambda}P\,{}^{\widetilde{st}}P\check{\hat{W}}_+^{*}P$$

$$=\check{\hat{W}}_+\check{\Lambda}\check{\hat{W}}_+^{-1*}=(\check{\hat{W}}_+^{*}\check{\Lambda}\check{\hat{W}}_+^{-1})^{*} \qquad (3.2)$$

上式において $\check{\hat{W}}_+\in Osp(\infty|\infty,S)$, $\check{\Lambda}\in \mathfrak{osp}(\infty|\infty)$ を用いていることに注意。又 $\widetilde{st}$ は involutive ではないが $\check{\hat{W}}_+\in Osp(\infty|\infty.S)$ より $\check{\hat{W}}_+^{-1}\in Osp(\infty|\infty.S)$ がいえる。

一方 $\mathfrak{gl}(\infty|\infty)$ における st を $\mathcal{H}(Q)$ に形式的に適用すると

st と $\widetilde{st}$ の関係は $A=\begin{bmatrix}A_{00}, & A_{01}\\ A_{10}, & A_{11}\end{bmatrix}\in\mathfrak{gl}(Q)_{\underline{0}}$ とすると

$${}^{st}A={}^{\widetilde{st}}A$$

$A\in\mathfrak{gl}(Q)_{\underline{1}}$ のときは

$${}^{\widetilde{st}}A=-({}^{st}A)^{*}$$

(3.2)より ${}^{\widetilde{st}}P\,{}^{\widetilde{st}}(\check{\hat{W}}_+^{*}\check{\Lambda}\check{\hat{W}}_+^{-1})P=(\check{\hat{W}}_+^{*}\check{\Lambda}\check{\hat{W}}_+^{-1})^{*}$

両辺に$*$をほどこして

$$\widetilde{st}P^{*\widetilde{st}}(\check{\hat{W}}_+^* \Lambda \check{\hat{W}}_+^{-1})P = \check{\hat{W}}_+^* \Lambda \check{\hat{W}}_+^{-1}$$

stと$\widetilde{st}$の関係から

$$^{st}P^{st}(\check{\hat{W}}_+^* \check{\Lambda} \check{\hat{W}}_+^{-1})P = -\check{\hat{W}}_+^* \check{\Lambda} \check{\hat{W}}_+^{-1} \qquad (3.3)$$

一般に $A \in Mat(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, Q)$ に対し

$(^{st}P^{st}\check{A}P)_{上} = {}^{st}P^{st}((\check{A})_{上})P$ より (3.3)の

両辺の上 part をとって

$^{st}P^{st}\check{B}P = -B$ これは $B \in osp(S)_{上}$ を示している。//

方程式(1.11)で $B \in osp(S)_{上}$, $C \in osp(S)_{上}$ なる条件

は $u(s) = u(-s) + s\log(-1)$ (3.4)

と同値。(3.4)に $u(s) = u(s+4)$ なる条件をつけ加えると(1.11)

は次の方程式に reduce する。

$$u(1) = 2\cosh u(1) \qquad (3.4)$$

$f = \mathcal{E}(u(1))$ とすると f は

$$\partial_{x^+}\partial_{x^-} f = -2\sinh f \qquad (3.5)$$

をみたす。(3.4)を super sine-Gordon 方程式という。

References.

1. M.Chaichian and P.P.Kulish:On the method of inverse scattering problem and Bäcklund transformations for supersymmetric equations. Physics Letters.78B (1978), 413 - 416.

2. B.De Witt: Supermanifolds. Cambridge up. 1984.

3. M.Jimbo and T.Miwa:Solitons and infinite dimensional Lie algebras, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 19(1983), 943-1001.

4. V.G.Kac:Lie super algebras. Adv. Math. 26(1977), 8-96.

5. D.A.Leites:Lie super algebras. J. Soviet Math. 30(6) (1985), 2481- 2512.

6. M.A.Olshanetsky:Supersymmetric two dimensional Toda lattice. Commun.Math.Phys. 88(1983), 63 - 76

7 K.Ikeda: to appear Letters in Mathmaticalphysics

8 池田薫 都立大学修士論文

9. K.Ueno and K.Takasaki:Toda Lattice Hierarchy. Advanced Studies in Pure Math 4(1984). Group Representations and Systems of Differential Equations. 1 - 95.

10. K.Ueno and H.Yamada:Super Kadomtsev-Petviashvili hierarchy and super Grassmann manifold. Lett. Math. Phys. 13 (1987). 59-68.

11. ——— :Supersymmetric extension of the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy and universal super Grassmann manifold. to appear in Advanced Studies in Pure Math . " Two - Dimensional Comformal Field theory and Exactly solovable Lattice Model".